



TD2 – Espace vectoriel, géométrie, rang

Exercice 1 :

Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des espaces vectoriels :

1. $F_1 = \{f \text{ de } \mathfrak{R} \text{ dans } \mathfrak{R} / f(0) = 0 \}$
2. $F_2 = \{p \text{ polynômes} / \deg ré(p) \geq 3 \}$
3. $F_3 = \{(0,0), (1,1), (-1,-1) \}$
4. $F_4 = \{(x,2x), x \in \mathfrak{R} \}$

Exercice 2 :

1. Montrer que l'ensemble des matrices 3x3 de la forme $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}$ forment un espace vectoriel.
2. Pouvez-vous imaginer une base de cet espace vectoriel ?
3. En déduire la dimension de cet espace vectoriel.

Exercice 3 :

1. Montrer que l'ensemble des matrices 2 x 3 : $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ forment un espace vectoriel.
2. Pouvez vous imaginer une base de cet espace vectoriel ?
3. En déduire la dimension de cet espace vectoriel.

Exercice 4 :

Soient $X = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}$ et $Y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Soit E l'ensemble des matrices réelles M de dimensions 2x2 telles que $XY = 0$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Quelle est sa dimension ? Trouver une base de E.
3. Soient F et G les ensembles de matrices réelles 2x2 telles que $XM = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $MY = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
Montrer que $E = F + G$.

Exercice 5 :

1. Ecrire la matrice d'une rotation d'angle θ .
2. Ecrire la matrice inverse de la matrice d'une rotation d'angle θ .
3. Ecrire la matrice d'une rotation d'angle 2θ .

4. En déduire une expression de $\cos(2\theta)$ et de $\sin(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$.

Exercice 6 :

1. Inverser la matrice suivante par la méthode du pivot de Gauss : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

2. Quelle est la transformation géométrique représentée par cette matrice ?

3. En déduire géométriquement la matrice inverse.

Exercice 7 :

1. Inverser la matrice : $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Quelle transformation géométrique de l'espace à 3 dimensions, cette matrice représente-t-elle ?

3. En déduire la matrice inverse de cette manière (géométrique).

Exercice 8 :

On suppose que dans une espace à trois dimensions, le point $(1,1,1)$ subit tout d'abord une rotation de -45° par rapport à l'axe Ox puis une rotation de -45° par rapport à l'axe Oz .

Quelle est la matrice correspondant à cette transformation et le résultat ?