Licence 2 - SDV **2008-2009**

UE Mathématiques appliquées à la biologie

TD4 – Corrigé

Exercice 1 :

1. l'équation différentielle y'+2y=0 a pour solutions les fonctions f définies sur $\Re$ par :
$f(x) = ke^{-2x}$ $avec\, k \in \Re$
Sachant que f(1)=3, on en déduit : $ke^{-2} = 3 \Leftrightarrow k = 3e^{é}$
On a donc $f(x) = 3e^{é}e^{-2x}$, c'est-à-dire $f(x) = 3e^{-2x+2}$ pour tout $x \in \Re$.

2. L'équation différentielle 3y'-2y=0 peut aussi s'écrire $y' - \frac{2}{3}y = 0$.
Cette équation a pour solutions les fonctions f définies sur $\Re$ par :
$f(x) = ke^{\frac{2}{3}x}$ $avec\, k \in \Re$
Sachant que f(3)=-1, on en déduit : $ke^{2} = -1 \Leftrightarrow k = -e^{-é}$
On a donc $f(x) = -e^{-é}e^{\frac{2}{3}x}$, c'est-à-dire $f(x) = -e^{\frac{2}{3}x-2}$ pour tout $x \in \Re$.

3. L'équation différentielle 2y'=y peut aussi s'écrire $y' - \frac{1}{2}y = 0$.
Cette équation a pour solutions les fonctions f définies sur $\Re$ par :
$f(x) = ke^{\frac{1}{2}x}$ $avec\, k \in \Re$
Sachant que 2f(-1)=3, on en déduit : $2ke^{\frac{-1}{2}} = 3 \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}$
On a donc $f(x) = \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}x}$, c'est-à-dire $f(x) = \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}(x+1)}$ pour tout $x \in \Re$.

4. L'équation différentielle y-2y'=0 peut aussi s'écrire $y' - \frac{1}{2}y = 0$.
Cette équation a pour solutions les fonctions f définies sur $\Re$ par :
$f(x) = ke^{\frac{1}{2}x}$ $avec\, k \in \Re$
Sachant que f(0)=3, on en déduit : $2ke^{0} = 3 \Leftrightarrow k = 3$
On a donc $f(x) = 3e^{\frac{1}{2}x}$ pour tout $x \in \Re$.

Exercice 2 :

1. L'équation différentielle 4y'-3y=0 peut aussi s'écrire $y' - \frac{3}{4}y = 0$.
Cette équation a pour solutions les fonctions f définies sur $\Re$ par :
$f(x) = ke^{\frac{3}{4}x}$ $avec\, k \in \Re$

Sachant que f(0)=1, on en déduit : $ke^0 = 1 \Leftrightarrow k = 1$

On a donc $f(x) = e^{\frac{3}{4}x}$ pour tout $x \in \Re$.

Donc $f(1) = e^{\frac{3}{4}}$.

Le point d'abscisse 1 de la courbe f a donc pour ordonnée $e^{\frac{3}{4}}$.
La première affirmation est donc fausse.

2. On a 4f'-3f=0 donc 4f'(0)-3f(0)=0
Sachant que f(0)=1, on en déduit f'(0)=3/4
La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur ¾.
La seconde affirmation est donc fausse.

3. On a vu que f est définie par $f(x) = e^{\frac{3}{4}x}$ pour tout $x \in \Re$, qui est une fonction croissante sur $\Re$.
La troisième affirmation est donc vraie.

4. f est telle que 4f'-3f=0 donc $f' = \frac{3}{4} f$.

En dérivant, on en déduit que $f'' = \frac{3}{4} f'$, donc $f'' = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} f = \frac{9}{16} f$.

Donc 16f''-9f=0.
La quatrième affirmation est donc vraie.

Exercice 3 :

1. f est définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t) = \theta(t) - 20$
On a donc $f'(t) = \theta'(t)$
Donc $f'(t) + 0{,}1 f(t) = \theta'(t) + 0{,}1(\theta(t) - 20) = \theta'(t) + 0{,}1\theta(t) - 2$
On sait que la fonction θ est telle que $\theta'(t) + 0{,}1\theta(t) = 2$
On a donc $f'(t) + 0{,}1 f(t) = 0$ pour tout $t \in [0;+\infty[$
F est une solution de l'équation différentielle (E) : y'+0,1y=0.

2. On sait que l'équation différentielle y'+0,1y=0 a pour ensemble de solutions l'ensemble des fonctions y définies par $y(t) = ke^{-0{,}1t} \; avec \, k \in \Re$

3. f étant solution de l'équation différentielle €, on a donc $f(t) = ke^{-0{,}1t} \; avec \, k \in \Re$
On sait que $f(t) = \theta(t) - 20$, donc $\theta(t) = f(t) + 20$
Donc $\theta(t) = ke^{-0{,}1t} + 20 \; avec \, k \in \Re$
De plus, à l'instant t=0, la température du conducteur est égale à 0°C, on a donc $\theta(0) = 0$.
Donc $ke^0 + 20 = 0 \Leftrightarrow k = -20$
On a donc $\theta(t) = -20e^{-0{,}1t} + 20$, c'est-à-dire $\theta(t) = 20(1 - e^{-0{,}1t})$ pour tout $t \in [0;+\infty[$.

4. On a $\theta(10) = 20(1 - e^{-0{,}1\times 10}) = 20(1 - e^{-1})$
Au bout de 10 secondes, la température en degrés Celsius est $\theta(10) = 20(1 - e^{-1})$, soit environ 12,6°C.
On a $\theta(30) = 20(1 - e^{-0{,}1\times 30}) = 20(1 - e^{-3})$
Au bout de 30 secondes, la température en degrés Celsius est $\theta(10) = 20(1 - e^{-3})$, soit environ 19°C.

On a $\theta(60)=20(1-e^{-0,1\times 60})=20(1-e^{-6})$

Au bout de 1 minute, la température en degrés Celsius est $\theta(60)=20(1-e^{-6})$, soit environ 19,95°C.

On sait que $\lim_{t\to-\infty} e^{x}=0$, donc $\lim_{t\to+\infty} e^{-0,1t}=0$

On en déduit $\lim_{t\to+\infty}\theta(t)=20$

Exercice 4 :

Soit V la vitesse de croissance.

$$V=\frac{dN}{dT}=rN\left(1-\frac{N}{K}\right)$$

Pour trouver les optima locaux de cette fonction, on dérive par rapport à N.

$$\frac{d\frac{dN}{dt}}{dN}=0=\frac{d\left(rN\left(1-\frac{N}{K}\right)\right)}{dN}=\frac{d\left(rN-r\frac{N^2}{K}\right)}{dN}=r-\frac{2rN}{K}$$

Donc $r=\frac{2rN}{K}$ et $N=\frac{K}{2}=250$

Pour cet effectif, la croissance de la population est de :

$\frac{dN}{dt}=\frac{rK}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{rK}{4}=0,1\times\frac{500}{4}=12,5$ individus par jour

Exercice 5 :

1. Au bout d'une semaine, 0.03x300 = 9 morts, et 0.07x300 = 21 naissances, soit N1 = 312 individus.

$N_1 = N_0 + N_0*b - N_0*d = N_0*(1+b-d) = N_0*(1+R)$

R taux de croissance de la pop = 0.04

λ = 312/300 = 1.04 = 1+R

2. $N_1 = N_0 * \lambda$, $N_2 = N_1 * \lambda = N_0 * \lambda^2$ ….. $N_{11} = N_0 * \lambda^{11}$ = 461 individus

3. En considérant une croissance continue, on considère une variation sur un très petit intervalle de temps $\frac{dN}{dt}$

On traduit la croissance par une loi exponentielle $\frac{dN}{dt}=rN$. On intègre et on obtient $N_t=N_0e^{rt}$, soit $\frac{N_t}{N_0}=e^{rt}(=\lambda^t)$

Donc e^{11*r} = 461/300 = 1.54 → r = ln(1.54)/11 = 0.04

Ou directement r = ln λ = ln (1.04) = 0.04

On peut aussi calculer $N_{11} = N_0 * e^{rt} = N_0 * e^{0,44}$ = 466 ≈ 461

On remarque que r = R. Car pour x petit, x est a peu près égal a ln (1+x)

Par contre pour un taux d'accroissement de 5

→ R = 5-1 = 4

→ r = ln(5) = 1.6

Les valeurs sont différentes.

Mais en dynamique des populations, le r est souvent faible donc on peut faire l'approximation sans trop se tromper.

4. On peut expliquer cette stabilisation par la notion de capacité de charge ou capacité limite de milieu, liée à la compétition intraspécifique. (cette valeur de K = 1000 est valable pour cette population (dépend de la quantité de ressources –espace, nourriture – disponible)
Equation logistique :

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

Au début, lorsque N est très inférieur à K, on a une croissance quasiment exponentielle. Vers la fin, quand N est proche de K, alors $\frac{dN}{dt}$ tend vers 0 et on a une stabilisation de la population.

5. la vitesse V de croissance de la population correspond à $\frac{dN}{dt}$.

Pour N=50, V = 0.04x50x(1-50/1000) = 1.9
Produit 1.9 individus par semaine.

Remarque en cas de croissance exponentielle : $\frac{dN}{dt} = 0{,}04 \times 50 = 2$. Pour l'instant la population suit quasiment une croissance exponentielle.

Pour N=400, V=9.6
Pour N=900, V=3.6
Pour N=1000, V=0
Pour N=1100, V= -4.4
La vitesse augmente puis diminue jusqu'à s'annuler quand la population est a la capacité de charge (ou être négative si on dépasse la capacité, d'où diminution du nombre d'individus, cas rencontré pour N=1100)
Explications biologiques :
Au début il y a peu d'individus, donc la production de la population est faible.
Exemple pour N=50, on a quasiment une croissance exponentielle (donc on peut appliquer le taux de natalité et le taux de mortalité intrinsèque) : cela donne 0.03x50 = 1.5 morts par semaine et 0.07x50= 3.5 naissances par semaine, d'où une croissance de 2 individus par semaine.
Quand le nombre d'individus augmente, le nombre de naissances augmente en valeur absolue.
A des densités plus fortes, l'effet de la compétition intraspécifique se fait sentir (sur les naissances et/ou sur la mortalité) et la vitesse de croissance de la population diminue jusqu'à s'annuler.
Il existe donc un optimum au milieu.

6. Si la vitesse de croissance de la population est maximum, alors sa dérivée par rapport à l'effectif *N de* la population s'annule.

$$\frac{d\frac{dN}{dt}}{dN} = 0 = \frac{d\left(rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)\right)}{dN} = \frac{d\left(rN - r\frac{N^2}{K}\right)}{dN} = r - \frac{2rN}{K}$$

Donc $r = \frac{2rN}{K}$ et $N = \frac{K}{2}$

La production maximum d'une population a lieu quand elle est à la moitié de sa capacité de charge. Ce résultat simple est utilisé en exploitation de population (poisson d'élevage).

Exercice 6 :

1 :dN/dt =dx/dt = - rx/K (K+x). dN/dt a le signe opposé à x: si x>0 N en dessus de K décroit et si x<0, N en dessous de K croit.
Pour x>0, |x| = x et |dN/dt| = rx/K (K+x).
Pour x<0, on pose |x|= - x>0 et |dN/dt| = r|x|/K (K-|x|) < r|x|/K (K+|x|)

2. L'effectif peut dépasser la capacité de charge si :

- il y a des variations temporelles de la qualité de l'environnement, qui font qu'il y a une bonne année et donc une bonne production l'année suivante. Si t+1 = mauvaise année : alors passe au dessus de la capacité de charge
- très fort r, qui fait passer en une année au-dessus de K

- stochasticité démographique : correspondant à la probabilité de se reproduire pour un individu.

Exercice 7 :

1. Il s'agit d'un modèle logistique. 0,08 représente le taux de croissance. 400000 représente la capacité de charge du milieu.

2. On sait que l'équation logistique $y'=ay\left(1-\frac{y}{K}\right)$ admet un équilibre stable en y=K=400000 vers lequel tendent toutes les solutions issues d'un point $y(0)>0$.

$\lim_{t\to+\infty} y(t)=400000$

3. On a $y_n=y_{n-1}+h\times 0,08y_{n-1}\left(1-\frac{y_{n-1}}{400000}\right)$, avec h=1

$y_n=y_{n-1}\left(1+0,08y_{n-1}\left(1-\frac{y_{n-1}}{400000}\right)\right)$

En partant de $y_0=70000$, on trouve successivement :

$y_1=74620$, $y_2=79476$, $y_3=84571$, $y_4=89906$, etc.

4. Les équilibres sont les solutions y de l'équation $y'=0,08y\left(1-\frac{y}{400\,000}\right)-3000=0$, équation qui est de la forme $ay^2+by+c=0$, avec $a=\frac{-0,08}{400000}$, $b=0,08$ et $c=-3000$

La formule usuelle pour résoudre les équations du second degré donne les équilibres suivants : $y_-\approx 41886$ et $y_+\approx 358114$.

y_- est instable et y_+ est stable.

5. On constate que $70000>y_-$, donc y(t) va augmenter et tendre vers l'équilibre y_+.

6. Les équilibres sont : $y_-\approx 77526$ et $y_+\approx 322475$ ..

y_- est instable et y_+ est stable.

La population va diminuer et aller à 0 car $y(0)=70000<y_-$.