Licence 2 - SDV 2008-2009

UE Mathématiques appliquées à la biologie

TD5 – Systèmes d'équations différentielles

Exercice 1 :

On considère le système différentiel linéaire :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y \end{cases}$$

1. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres associés à ce système d'équations différentielles.
2. En déduire l'expression de la solution générale de ce système.
3. Trouver la solution qui passe par le point x=1 ;y=0 pour t=0.

Exercice 2 :

On considère le système différentiel linéaire :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + 7y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}$$

1. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres associés à ce système d'équations différentielles.
2. En déduire l'expression de la solution générale de ce système.
3. Trouver la solution qui passe par le point x=1 ;y=1 pour t=0.

Exercice 3 :

On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2 - xy \\ \dfrac{dy}{dt} = (1-x)(1-y) \end{cases}$$

1. Rechercher les points fixes du système.
2. Rechercher les isoclines de pente nulle et de pente infinie (c'est-à-dire les courbes où la tangente aux trajectoires, solutions du système différentiel, est horizontale ou verticale).
3. Ecrire la matrice jacobienne du système.
4. Etudier le système linéaire autour du point M_1 (2 ;1).
5. Etudier le système linéaire autour du point M_2 (1 ;2).
6. Décrire l'allure générale des trajectoires.

Exercice 4 :

Dans un système écologique, coexistent des prédateurs y et des proies x. On suppose que :

a. La quantité de proies x, en absence de prédateurs, varie proportionnellement à leur effectif (croissance exponentielle) avec un coefficient 1.
b. L'effet des prédateurs est de réduire le nombre de proies proportionnellement à la quantité de proies et de prédateurs, avec un coefficient 1.
c. En absence de proies, la quantité de prédateurs tend vers zéro exponentionnellement (proportionnellement au nombre de prédateurs avec un coefficient -1).
d. La contribution des proies à la croissance des prédateurs est proportionnelle à la quantité disponible de proies et de prédateurs (avec un coefficient 1).

1. Montrer que dans ces conditions, le système différentiel décrivant les variations de proies x et des prédateurs y peut s'écrire :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - xy = x(1-y) \\ \dfrac{dy}{dt} = -y + xy = y(1-x) \end{cases}$$

On justifiera chaque terme du système précédent.
2. Rechercher les points fixes de ce système.
3. Ecrire la matrice jacobienne de ce système.
4. Etudier le système linéarisé autour du point (0 ;0). En déduire l'allure des trajectoires du système au voisinage de ce point.
5. Etudier le système linéarisé autour du point (1 ;1). En déduire l'allure des trajectoires du système au voisinage de ce point.

Exercice 5 :

Par des relevés de populations sur deux espèces en coexistence, on estime la loi mathématique que suit la dynamique de chacune des 2 populations :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = 0{,}8X - 0{,}0067X^2 - 0{,}05XY \\ \dfrac{dY}{dt} - 0{,}3X + 0{,}004XY \end{cases}$$

1. Quelle relation unit ces deux espèces ? Retrouvez la valeur des paramètres.
2. On estime au départ les effectifs de ces deux populations à X=20 et Y=5 ; prédisez à court terme l'évolution des deux populations.
3. Dans quel état seront les populations à long terme ? Donnez les effectifs des deux espèces à l'équilibre.

Exercice 6 :

L'objectif de cet exercice est d'étudier la compétition entre deux espèces de scorpions : les scorpions rouges (espèce 1) et les scorpions noirs (espèce 2). Les rouges ont une capacité de charge $K_1=100$; l'effet d'un individu de l'espèce noire sur la dynamique de population de l'espèce rouge est $\alpha=2$. Au départ on observe sur le même site 25 scorpions rouges et 50 scorpions noirs.

1. Retrouvez l'équation qui décrit la dynamique de la population des scorpions rouges. La population de scorpions rouges va-t-elle augmenter ou diminuer ?
2. Tracez la droite d'équation $dN_1/dt=0$ (isocline)
3. Les scorpions noirs ont une capacité de charge $K_2=150$; l'effet d'un individu de l'espèce rouge sur la dynamique de population de l'espèce noire est $\beta=3$. Retrouvez de même l'équation de dynamique de la population 2, son évolution, et son isocline sur le même graphique.
Prédire, à terme l'évolution des deux populations en compétition
4. Que se serait-il passé pour la situation initiale suivante : $N_1=70$, $N_2=10$? Qu'en déduisez vous ? Dans quel cas sommes-nous ici ? Pourquoi ?