TD1 – Corrigé

Exercice 1 :

On cherche le nombre de façons de sélectionner 2 valeurs parmi les 7 valeurs possibles (nombres de 1 à 6 plus le 0). Cela correspond à une combinaison de 2 objets parmi 7. Mais une combinaison est effectuée sans remise (si on prend le 1, il n'est plus disponible pour le deuxième tirage), donc cette combinaison ne permet que de compter les dominos simples (valeurs des deux côtés différentes). On a donc :

Dominos simples : $C_7^2 = \frac{7\times 6}{2!} = 21$

Il faut ensuite compter les dominos doubles, qui prennent des valeurs de 0 à 6 points, soit 7 possibilités.

Il y a 21+7 = 28 pièces dans le jeu.

Exercice 2 :

On considère tout d'abord que les drapeaux rouges et les drapeaux jaunes sont différents les uns des autres. On cherche alors le nombre de façon de sélectionner 6 drapeaux parmi 6 drapeaux différents en tenant compte de l'ordre. Il s'agit d'une permutation sur 6 drapeaux, soit A_6^6.

Or tous les drapeaux rouges sont interchangeables et tous les drapeaux jaunes sont interchangeables. Certaines des possibilités calculées précédemment sont donc identiques. Il s'agit de toutes les permutations sur les drapeaux rouges et toutes les permutations sur les drapeaux jaunes. Le nombre total de permutation calculé précédemment doit être divisé par le nombre de permutations identiques. On a donc :

$\frac{A_6^6}{A_4^4 \times A_2^2} = \frac{6!}{4!\times 2!} = \frac{6\times 5}{2} = 15$ possibilités.

On peut constituer 15 signaux différents.

Exercice 3 :

1. On tire 5 sièges parmi les 10 pour les attribuer dans l'ordre à Vincent, Luc, Sophie, Matthieu et Nathalie. Il s'agit donc d'un arrangement de 5 objets parmi 10.

$A_{10}^5 = \frac{10!}{(10-5)!} = 30240$

2. Pour placer le groupe de 5 amis, on considère que le groupe de 5 est un objet à positionner au sein de 6 emplacements (1 pour le groupe et 5 vides restantes), soit 6 possibilités.

Au sein du groupe d'amis, on considère « Vincent installé à gauche de Sophie » comme un objet à arranger parmi les 4 (les 3 autres amis + le couple), soit $A_4^4 = 4! = 24$.

Au total ils ont $6\times 24 = 144$ possibilités.

Note : si l'énoncé indiquait « Vincent à côté de Sophie », il faudrait considérer le nombre de façons d'arranger le couple (Vincent à gauche ou à droite), soit 2 possibilités, et on aurait au total 144x2 = 288 façon de placer les 5 amis dans la rangée.

Exercice 4 :

L'épreuve est constituée par le lancer successif des deux dés. Les deux dés doivent donc être pris en compte dans tous les calculs, même si les deux lancers sont indépendants.

Pour A, on veut un 2 avec le premier dé, et n'importe quelle valeur pour le second. Les deux lancers étant indépendants, on a :

$$p(A)=\frac{1}{6}\times\frac{6}{6}=\frac{1}{6}$$

Pour B, on peut faire un 5 de 4 façons différentes (1+4 ; 2+3 ; 3+2; 4+1), parmi les 36 couples de valeurs possibles avec les deux dés.

$$p(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

Pour C, il existe 6 possibilités pour avoir deux dés avec un nombre de points égaux, parmi les 36 couples de valeurs possibles.

$$p(C)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

Il n'existe qu'une possibilité d'avoir une somme de 5 (événement B) tout en ayant un premier dé ramenant une valeur de 2 (événement A) :2+3.

$p(A\cap B)=\frac{1}{36}$. A et B ne sont pas indépendants.

Il n'existe qu'une possibilité d'avoir des dés aux valeurs égales (événement C) tout en ayant un premier dé ramenant une valeur de 2 (événement A).

$p(A\cap C)=\frac{1}{36}$. A et C ne sont pas indépendants.

Il est impossible de faire un 5 (événement B) avec des dés de valeurs égales (événement C). B et C sont incompatibles.

$p(B\cap C)=0$.

B et C étant déjà incompatibles, leur intersection avec l'événement A reste nulle.

$p(A\cap B\cap C)=p(A\cap(B\cap C))=0$.

Exercice 5 :

1. Le fait qu'un premier billet est gagnant n'est pas indépendant du fait qu'un autre billet soit gagnant. En effet, si c'était le cas, on serait dans une situation où chaque billet aurait 1 chance sur 50 d'être gagnant (similaire à 100 lancers successifs d'un dé à 50 faces). Dans cette situation on pourrait avoir 100 billets gagnants. Il n'y en a que 2, d'où la non indépendance.

Le fait qu'un billet soit gagnant n'étant pas indépendant des autres, on doit considérer que les billets ne sont pas interchangeables. On a donc un billet 1, un billet 2, etc. On a donc de nombreuses façons de constituer des ensembles de 12 billets parmi 100. Comme l'ordre dans lequel on sélectionne les 12 billets n'a pas d'importance, il s'agit d'une combinaison de 12 billets parmi 100, soit C_{100}^{12}, qui constitue le nombre de cas possibles.

Soit A la probabilité de gagner au moins une fois en prenant 12 billets. Il est plus facile de calculer la probabilité complémentaire, soit la probabilité de perdre. En effet, pour perdre, il faut choisir 12 billets parmi les 98 billets non gagnants, soit C_{98}^{12}. On a alors :

$$p(\overline{A})=\frac{cas\ favorables}{total\ des\ cas}=\frac{C_{98}^{12}}{C_{100}^{12}}$$

$$p(A)=1-\frac{C_{98}^{12}}{C_{100}^{12}}=1-\frac{\frac{98!}{12!\times 86!}}{\frac{100!}{12!\times 88!}}=1-\frac{88\times 87}{100\times 99}=1-\frac{7656}{9900}=\frac{2240}{9900}=\frac{112}{495}$$

2. Soit n le nombre de billets requis. On cherche n tel que A, la probabilité de gagner au moins une fois, soit :

$$p(A) = 1 - \frac{C_{98}^{n}}{C_{100}^{n}} > \frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{5} > \frac{\frac{98!}{n!\times(98-n)!}}{\frac{100!}{n!\times(100-n)!}} = \frac{(100-n)(99-n)}{99\times100}$$

$$99\times20 > n^2 - 199n + 9900$$

$$n^2 - 199n + 7920 < 0$$

$$\Delta = 7921$$

n1=144 et n2=55

Comme on ne peut pas acheter plus de billets qu'il n'y en a en vente :

$$55 < n \leq 100$$

Exercice 6 :

On note : R1 : boule rouge tirée de A. R2 : boule rouge tirée de B. N1 : boule noire tirée de A. N2 : boule noire tirée de B.

1.

$$p(a) = p((R1 \cap R2) \cup (N1 \cap N2))$$

On ne peut pas avoir de boules qui soient à la fois noires et rouges, donc les deux membres de l'union sont mutuellement exclusifs. On a donc :

$$p(A) = p(R1 \cap R2) + p(N1 \cap N2)$$

En utilisant la formule des probabilités conditionnelles :

$$p(a) = p(R2 / R1)p(R1) + p(N2 / N1)p(N1)$$

$$p(a) = \frac{4}{5}\times\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\times\frac{1}{2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

2.

$$p(b)=p(R1/N2)=\frac{p(R1\cap N2)}{p(N2)}=\frac{p(N2/R1)p(R1)}{p(N2)}=\frac{p(N2/R1)p(R1)}{p(N2\cap R1)+p(N2\cap N1)}$$

$$p(b)=\frac{p(N2/R1)p(R1)}{p(N2/R1)p(R1)+(p(N2/N1)p(N1)}$$

$$p(b)=\frac{\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{3}$$

Exercice 7 :

On note : A : la machine vient de l'usine A. B : la machine vient de l'usine B. D : la machine présente un défaut.

1.

$$p(a) = p((D \cap A) \cup (D \cap B)$$

On ne peut pas avoir de machines qui viennent à la fois de l'usine A et de l'usine B, donc :

$$p(a) = p(D \cap A) + p(D \cap B)$$

$$p(a) = p(D / A)p(A) + p(D / B)p(B)$$

$$p(a) = \frac{20}{100}\times\frac{70}{100} + \frac{10}{100}\times\frac{30}{100} = \frac{17}{100}$$

2.

$$p(b) = p(B/D) = \frac{p(B \cap D)}{p(D)} = \frac{p(D/B)p(B)}{p(a)} = \frac{100}{17} \times \frac{10}{100} \times \frac{30}{100} = \frac{3}{17}$$

Exercice 8 :

On note :
A : avoir la maladie A
T : test positif
On cherche p(A/T)

$$p(A/T) = \frac{p(A \cap T)}{p(T)} = \frac{p(T/A)p(A)}{p((A \cap T) \cup p(\overline{A} \cap T))} = \frac{p(T/A)p(A)}{p(A \cap T) + p(\overline{A} \cap T)}$$

$$p(A/T) = \frac{p(T/A)p(A)}{p(T/A)p(A) + p(T/\overline{A})p(\overline{A})} = \frac{0{,}8 \times 0{,}01}{0{,}8 \times 0{,}01 + 0{,}1 \times 0{,}99} = 0{,}075$$

Note : cet exemple est purement théorique. La probabilité d'être malade sachant que le test est positif est faible, ce qui suggère que le test de dépistage n'est pas fiable. Elle prend en compte le fait que l'occurrence de la maladie est faible dans la population et qu'il y a un taux élevé de faux négatifs (10% de tests positifs chez les personnes non malades). Il y a donc bien plus de chances de faire partie des faux négatifs que d'être vraiment malade.

Exercice 9 :

On note : M : être malade, T1 : test 1 positif, T2 : test 2 positif

1. $p(a) = p(T2/T1)$

Les tests sont indépendants donc :

$$p(a) = p(T2) = p((T2 \cap M) \cup (T2 \cap \overline{M})) = p(T2 \cap M) + (T2 \cap \overline{M})$$

$$p(a) = p(T2/M)p(M) + p(T2/\overline{M})p(\overline{M}) = 0{,}9 \times 0{,}6 + 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}66$$

2.

$$p(b) = p(M/T1 \cap M/T2) = p(M/T1) \times p(M/T2)$$

$$p(T1) = p(T1/M) \times P(M) + p(T1/\overline{M}) \times P(\overline{M}) = 0{,}7 \times 0{,}6 + 0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}5$$

$$p(M/T1) = \frac{p(T1/M) \times P(M)}{p(T1)} = \frac{0{,}7 \times 0{,}6}{0{,}5} = 0{,}84$$

$$p(M/T2) = \frac{p(T2/M) \times P(M)}{p(T2)} = \frac{0{,}9 \times 0{,}6}{0{,}66} = 0{,}82$$

$$p(b) = 0{,}84 \times 0{,}82 = 0{,}69$$

Note : là aussi l'exemple est purement théorique. Comme dans l'exercice précédent, l'occurrence de faux négatifs a pour résultat qu'avoir les deux tests positifs donne moins de chances d'être malade que si l'on connaît uniquement le résultat positif d'un des tests.

3.

$$p(c) = p(M/\overline{T1} \cap M/\overline{T2}) = p(M/\overline{T1}) \times p(M/\overline{T2})$$

$$p(M/\overline{T1}) = \frac{p(M \cap \overline{T1})}{p(\overline{\overline{T1}})} = \frac{p(M) - p(M \cap T1)}{1 - p(T1)}$$

$$p(M \cap T1) = p(M/T1)p(T1) = 0{,}84 \times 0{,}5 = 0{,}42$$

$$p(M/\overline{T1}) = \frac{0{,}6 - 0{,}42}{0{,}5} = 0{,}36$$

$$p(M/\overline{T2}) = \frac{p(M \cap \overline{T2})}{p(\overline{\overline{T2}})} = \frac{p(M) - p(M \cap T2)}{1 - p(T2)}$$

$p(M \cap T2) = p(M / T2)p(T2) = 0{,}82 \times 0{,}66 = 0{,}54$

$p(M / \overline{T1}) = \dfrac{0{,}6 - 0{,}54}{0{,}66} = 0{,}1764$

$p(c) = 0{,}09 \times 0{,}1764 = 0{,}0158$

4. $p(d) = p(M / T1 \cap M / \overline{T2}) = p(M / T1) \times p(M / \overline{T2}) = 0{,}84 \times 0{,}1764 = 0{,}148$